

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001**

Alberto Venni

R-LIMITATEZZA E CALCOLO FUNZIONALE

3 aprile 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Riassunto.

Vengono esposti alcuni recenti risultati sul calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali e sulla R-limitatezza, con applicazioni alla regolarità massimale per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in spazi di Banach.

Abstract.

Some recent results are exposed on the H^∞ functional calculus for sectorial operators and on R-boundedness, with applications to maximal regularity for linear differential equations of parabolic type in Banach spaces.

The H^∞ functional calculus for an N -tuple (T_1, \dots, T_N) of commuting sectorial operators is a map $f \mapsto f(T_1, \dots, T_N)$ where f is an operator valued bounded holomorphic function of N variables defined (roughly speaking) on the product of the spectra of T_1, \dots, T_N , $f(T_1, \dots, T_N)$ is a densely defined closed linear operator, and the map looks very like an algebra homomorphism. Though in general $f(T_1, \dots, T_N)$ need not be a bounded operator, the case where $f(T_1, \dots, T_N)$ is bounded whenever f is bounded and scalar valued has important consequences.

A family \mathcal{T} of bounded linear operators on a Banach space X to a Banach space Y is said to be R-bounded if it satisfies an estimate of the type

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k T_k x_k \right\|_Y \leq C \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k x_k \right\|_X$$

for arbitrary $N \geq 1, T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}, x_1, \dots, x_N \in X$. This property, that is stronger than boundedness, has proved to be very useful in connection with problems of maximal regularity for abstract parabolic equations.

Negli ultimi anni il calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali e la R-limitatezza sono stati applicati da diversi autori allo studio della regolarità massimale per equazioni astratte di tipo parabolico.

1 Calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali

Conveniamo che se T è un operatore lineare che agisce in uno spazio di Banach complesso, allora $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$, $\sigma(T)$ e $\rho(T)$ denotano, rispettivamente, il dominio, il codominio, lo spettro, l'insieme risolvente di T .

$\forall \beta \in]0, \pi[$ poniamo $S_\beta = \{re^{i\theta}; r > 0, -\beta < \theta < \beta\}$. Se poi $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in]0, \pi[^N$, allora $S_\beta = \prod_{j=1}^N S_{\beta_j}$.

1.1 Definizione. Sia T un operatore lineare nello spazio di Banach complesso X , e sia $\beta \in]0, \pi[$. Si dice che T è settoriale con angolo spettrale β se:

- (i) $\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ sono densi in X ;
- (ii) $\sigma(T) \subseteq \overline{S_\beta}$;
- (iii) $\forall \varepsilon \in]0, \pi - \beta[\exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \leq C_\varepsilon \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\beta+\varepsilon}}$.

Dalla condizione (iii) segue che $\ker T \cap \overline{\mathcal{R}(T)} = \{0\}$; perciò dalla condizione (i) si ottiene che ogni operatore settoriale è iniettivo.

Viceversa, se X è riflessivo, allora le condizioni (ii) e (iii) della definizione 1.1 implicano che $\mathcal{D}(T)$ è denso in X , e che $X = \ker T \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}$, cosicché T ha codominio denso se e solo se è iniettivo.

1.2 Definizione. Sia X uno spazio di Banach complesso, $\beta \in]0, \pi[^N$. Chiamiamo

$H(S_\beta, X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe da S_β a X ;

$H^\infty(S_\beta, X)$ lo spazio di Banach delle funzioni olomorfe e limitate da S_β a X , con la norma $\|f\|_\infty := \sup_{z \in S_\beta} \|f(z)\|_X$;

$H_0^\infty(S_\beta, X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe $f : S_\beta \rightarrow X$ che soddisfano la seguente condizione: $\exists C > 0, s > 0$ tale che $\forall z = (z_1, \dots, z_N) \in S_\beta$

$$\|f(z)\|_X \leq C \prod_{j=1}^N \left(\min \{|z_j|, |z_j|^{-1}\} \right)^s.$$

Si noti che se $X = \mathcal{L}(Y)$ (dove Y è uno spazio di Banach), allora le funzioni a valori scalari si possono identificare in modo naturale con le funzioni a valori in X sostituendo f con $f(\cdot) I_Y$. Inoltre in questo caso (o più in generale, se X è un'algebra di Banach) anche $H^\infty(S_\beta, X)$ è un'algebra di Banach, e $H_0^\infty(S_\beta, X)$ è un ideale bilatero di $H^\infty(S_\beta, X)$.

Siano T_1, \dots, T_N operatori settoriali in uno spazio di Banach complesso X , con angoli spettrali $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Supponiamo che i risolventi degli operatori T_1, \dots, T_N commutino, e chiamiamo \mathcal{B} il commutatore dei loro risolventi. Allora \mathcal{B} è una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{L}(X)$. Se $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ e $\alpha_j < \beta_j < \pi$ allora l'operatore $f(T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{B}$ si definisce come segue.

Sia $\gamma_j \in]\alpha_j, \beta_j[$. Poniamo $\Gamma = \prod_{j=1}^N \Gamma_j$, dove Γ_j è la curva parametrizzata da $t \mapsto |t| e^{-i\gamma_j \operatorname{sgn} t}$ per $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e orientata in accordo con i valori crescenti di t (cioè in accordo con i valori decrescenti di $\operatorname{Im} z$). Se $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora la funzione $z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^N (z_j - T_j)^{-1}$ è sommabile su Γ , e il suo integrale (che appartiene a \mathcal{B}) non dipende dalla scelta dei valori angolari $\gamma_j \in]\alpha_j, \beta_j[$. Perciò poniamo

$$f(T_1, \dots, T_N) = (2\pi i)^{-N} \int_{\Gamma} f(z) \prod_{j=1}^N (z_j - T_j)^{-1} dz.$$

Si prova che l'applicazione $f \mapsto f(T_1, \dots, T_N)$ è un omomorfismo di algebre da $H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ a \mathcal{B} .

Sia $\Psi_N : (\mathbb{C} \setminus \{-1\})^N \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$\Psi_N(z) = \prod_{j=1}^N \frac{z_j}{(1 + z_j)^2}.$$

Notiamo che $\Psi_N \in H_0^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$, e si ha

1.3 Lemma.

$$\Psi_N(T_1, \dots, T_N) = \prod_{j=1}^N T_j (1 + T_j)^{-2}.$$

Inoltre $\Psi_N(T_1, \dots, T_N)$ è iniettivo e ha codominio denso.

Allora si può estendere la definizione di $f(T_1, \dots, T_N)$ al caso di $f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ (e in realtà, volendo, anche a uno spazio più grande) con il seguente accorgimento. Se $f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora $\Psi_N f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$. Perciò possiamo porre

$$f(T_1, \dots, T_N) := \Psi_N(T_1, \dots, T_N)^{-1} (\Psi_N f)(T_1, \dots, T_N).$$

Questa definizione estende quella data sopra nel caso in cui $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, ma in generale $f(T_1, \dots, T_N)$ è un operatore chiuso, con dominio denso, ma non necessariamente limitato. Si può comunque dimostrare che:

1.4 Lemma. Se $f, g \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora

$$f(T_1, \dots, T_N) + g(T_1, \dots, T_N) \subseteq (f + g)(T_1, \dots, T_N)$$

e

$$f(T_1, \dots, T_N) g(T_1, \dots, T_N) \subseteq (fg)(T_1, \dots, T_N).$$

1.5 Lemma. Se $T_0 \in \mathcal{B}$ e $f(z) = T_0 \forall z \in S_\beta$, allora $f(T_1, \dots, T_N) = T_0$.

1.6 Definizione. Sia \mathcal{A} una sottoalgebra chiusa di \mathcal{B} . Diremo che (T_1, \dots, T_N) ha calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato se $f(T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{L}(X) \forall f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$.

Si noti che questa definizione include il caso delle funzioni scalari, che si ottiene ponendo $\mathcal{A} = \{\lambda I_X; \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Dal lemma 1.4 segue subito che se (T_1, \dots, T_N) ha calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato, allora $f \mapsto f(T_1, \dots, T_N)$ è un omomorfismo di algebre da $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ a $\mathcal{L}(X)$.

Il seguente risultato è di grande utilità, perché permette di dedurre la limitatezza del calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ da stime su funzioni appartenenti a $H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$, per le quali esiste un'esplícita rappresentazione integrale di $f(T_1, \dots, T_N)$.

1.7 Lemma. Sia \mathcal{A} una sottoalgebra chiusa di \mathcal{B} . Condizione necessaria e sufficiente affinché (T_1, \dots, T_N) abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato è che $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{A}) \|f(T_1, \dots, T_N)\| \leq C \|f\|_\infty$. In questo caso è anche $\|f(T_1, \dots, T_N)\| \leq C(\beta) \|f\|_\infty \forall f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$.

In certe situazioni è utile prendere in considerazione una situazione un po' diversa. Per spiegare di che cosa si tratta, cominciamo con il dare alcune definizioni.

1.8 Definizione. $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ poniamo $\Sigma_\alpha = (i S_\alpha) \cup (-i S_\alpha)$.

Σ_α è quindi il "doppio settore" di semiampiezza α la cui bisettrice è l'asse immaginario.

Ovviamente, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, allora Σ_α denota $\prod_{k=1}^N \Sigma_{\alpha_k}$.

1.9 Definizione. Sia T un operatore lineare nello spazio di Banach complesso X , e sia $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Si dice che T è bisettoriale con angolo spettrale α se:

(i) $\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ sono densi in X ;

(ii) $\sigma(T) \subseteq \overline{\Sigma_\alpha}$;

(iii) $\forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2} - \alpha[\exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \leq C_\varepsilon \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_{\alpha+\varepsilon}}$.

Poiché $\Sigma_\alpha \subset S_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$, è ovvio che un operatore bisettoriale con angolo spettrale $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ è anche settoriale con angolo spettrale $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Tuttavia nel caso di un operatore bisettoriale si può definire $f(T)$ anche quando f è olomorfa su Σ_δ , con $\alpha < \delta < \pi$, e non necessariamente sull'intero settore $S_{\frac{\pi}{2}+\delta}$. Analogamente, se T_1, \dots, T_N sono operatori bisettoriali con risolventi che commutano, si può definire $f(T_1, \dots, T_N)$ quando f è olomorfa su $\Sigma_\delta = \prod_{k=1}^n \Sigma_{\delta_k}$, se $\forall k$ δ_k è maggiore dell'angolo spettrale α_k dell'operatore bisettoriale T_k .

Per fare questo conveniamo che, nella situazione attuale, $H(\Sigma_\alpha, X)$, $H^\infty(\Sigma_\alpha, X)$ e $H_0^\infty(\Sigma_\alpha, X)$ abbiano un significato analogo a quello del caso settoriale, v. la definizione 1.2. Dopo di ciò definiamo dapprima $f(T_1, \dots, T_N)$ quando $f \in H_0^\infty(\Sigma_\delta, \mathcal{B})$. Se $\gamma_k \in$

$] \alpha_k, \delta_k[$, chiamiamo Γ_k la curva parametrizzata da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni t \mapsto |t| e^{-i\gamma_k \operatorname{sgn} t}$, e poniamo $\tilde{\Gamma}_k = \Gamma_k \cup (-\Gamma_k)$, dove Γ_k è orientata, come nel caso settoriale, in accordo con i valori decrescenti di $\operatorname{Im} z$, mentre $-\Gamma_k$ è orientata in accordo con i valori crescenti di $\operatorname{Im} z$.

Ponendo $\tilde{\Gamma} = \prod_{k=1}^N \tilde{\Gamma}_k$, definiamo

$$f(T_1, \dots, T_N) := (2\pi i)^{-N} \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) \prod_{k=1}^N (z_k - T_k)^{-1} dz.$$

È facile vedere che questo integrale è convergente (nella norma di $\mathcal{L}(X)$), non dipende dalla scelta dei $\gamma_k \in]\alpha_k, \delta_k[$, e che se $f \in H_0^\infty(S_\eta, \mathcal{B})$, con $\eta = (\delta_1 + \frac{\pi}{2}, \dots, \delta_N + \frac{\pi}{2})$, questa definizione coincide con quella data sopra. Pertanto anche nel caso bisettoriale si può estendere la definizione di $f(T_1, \dots, T_N)$ alle funzioni $f \in H^\infty(\Sigma_\delta, \mathcal{B})$ mediante la formula

$$f(T_1, \dots, T_N) := \Psi_N(T_1, \dots, T_N)^{-1} (\Psi f)(T_1, \dots, T_N).$$

I risultati noti nel caso settoriale (e tra questi i lemmi 1.4, 1.5, 1.7 enunciati sopra) si estendono, usualmente senza difficoltà, al caso bisettoriale.

In [9] è dimostrato il

1.10 Teorema. *Se $1 < p < \infty$, allora in $L^p(\mathbb{R}^N)$ gli operatori D_{x_j} ($1 \leq j \leq N$) sono bisettoriali, e $(D_{x_1}, \dots, D_{x_N})$ ha calcolo funzionale $H^\infty(\Sigma_\delta, \mathbb{C})$ limitato, $\forall \delta \in]0, \pi[^N$.*

2 Alcune osservazioni e commenti

Il calcolo funzionale per operatori settoriali fa capo al lavoro [16], dove la teoria veniva sviluppata negli spazi di Hilbert. L'estensione al caso degli spazi di Banach si trova in [6]. In questi due lavori si parla di calcolo funzionale per un singolo operatore, con funzioni olomorfe a valori complessi. L'estensione al caso del calcolo funzionale congiunto per due operatori forma l'oggetto dei lavori [1, 15].

2.1 Se una N -pla ordinata di operatori settoriali (T_1, \dots, T_N) , con risolventi che commutano, ammette calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato (v. la definizione 1.6 per la notazione), e se $\delta \in]0, \pi[^N$ è tale che $\delta_k > \beta_k \forall k$, allora (T_1, \dots, T_N) ha anche calcolo funzionale $H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$ limitato: infatti se $f \in H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$, allora $f(T_1, \dots, T_N)$ (nel senso di $H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$) coincide con $g(T_1, \dots, T_N)$ (nel senso di $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$) quando $g = f|_{S_\beta}$.

Perciò il calcolo funzionale limitato è tanto più "interessante", quanto più sono piccoli i settori sui quali viene definito. Questo vale anche per il caso bisettoriale, con le modifiche ovvie. ■

2.2 Indipendentemente dal fatto che (T_1, \dots, T_N) ammetta o meno calcolo funzionale H^∞ limitato su qualche prodotto cartesiano di (bi)settori, $f(T_1, \dots, T_N)$ si può definire (senza pretendere la limitatezza, in generale) anche per un'algebra di funzioni più grande di H^∞ . Nelle condizioni della definizione 1.6 (e considerazioni analoghe valgono nel caso bisettoriale) denotiamo con $\mathcal{F}(S_\beta, \mathcal{A})$ l'algebra delle funzioni olomorfe $f : S_\beta \rightarrow \mathcal{A}$

che soddisfano la seguente condizione: esistono $C, s > 0$ tali che $\forall z \in S_\beta \|f(z)\| \leq C \prod_{k=1}^N \left(\max \{ |z_j|, |z_j|^{-1} \} \right)^s$. Si tratta, almeno nel caso $N = 1$, delle funzioni la cui norma al più diverge polinomialmente in 0 e all'infinito. Se $f \in \mathcal{F}(S_\beta, \mathcal{A})$, s è come sopra, e k è un intero maggiore di s , allora $\Psi_N^k f \in H_0^\infty$, e quindi si può definire $(\Psi_N^k f)(T_1, \dots, T_N)$. Per di più $\Psi(T_1, \dots, T_N)^{-k} (\Psi_N^k f)(T_1, \dots, T_N)$ è un operatore chiuso con dominio denso e non dipende dall'intero $k > s$. Ciò permette di definire $f(T_1, \dots, T_N)$ anche in questo caso. ■

2.3 Si noti che per qualunque $\beta \in]0, \pi[$, tra le funzioni appartenenti a $\mathcal{F}(S_\beta, \mathbb{C})$ ci sono le potenze $z \mapsto z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Pertanto le potenze con esponente complesso di un operatore settoriale si possono definire mediante il calcolo funzionale. Si ha inoltre che la funzione $z \mapsto z^\alpha$ è limitata su S_β se e solo se $\operatorname{Re} \alpha = 0$. Perciò l'esistenza per un operatore settoriale T del calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato implica che T appartiene alla classe $\text{BIP}(\beta)$, cioè che T ha potenze immaginarie limitate con $\|T^{i\alpha}\| \leq C e^{|\alpha|}$. ■

2.4 In [8] è stato dimostrato che se in uno spazio di Banach con la proprietà UMD A e B sono operatori settoriali con risolventi che commutano e con $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, e se $A \in \text{BIP}(\theta_A)$, $B \in \text{BIP}(\theta_B)$, con $\theta_A + \theta_B < \pi$, allora $0 \in \rho(A + B)$. Se, come in [11, 17], si elimina l'ipotesi che $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, allora si prova che $A + B$ è, sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, un operatore chiuso. Tutto ciò si applica alla regolarità massimale in $L^p(0, T; E)$ della soluzione del problema di Cauchy

$$(2.5) \quad \begin{cases} u' + \Lambda u = f \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

quando $1 < p < \infty$, E è uno spazio di Banach UMD, e $\Lambda \in \text{BIP}(\theta)$, con $\theta < \frac{\pi}{2}$. L'applicazione richiede il fatto (provato in [8]) che se E ha la proprietà UMD e $1 < p < \infty$, allora l'operatore di derivazione con dominio $\{u \in W^{1,p}(0, T; E); u(0) = 0\}$ appartiene alla classe $\text{BIP}(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$.

In ogni modo, tornando al problema operatoriale, quello che tecnicamente occorre dimostrare è che valgono stime del tipo $\|Au\| \leq C\|Au + Bu\|$ e $\|Bu\| \leq \|Au + Bu\|$. Questo spiega l'interesse per il calcolo funzionale congiunto di una coppia di operatori settoriali che commutino: infatti se A e B sono operatori settoriali con angoli spettrali θ_A e θ_B tali che $\theta_A + \theta_B < \pi$, scegliendo ε in modo che $\theta_A + \theta_B + 2\varepsilon < \pi$, su $S_{\theta_A+\varepsilon} \times S_{\theta_B+\varepsilon}$ le funzioni $(w, z) \mapsto f(w, z) := \frac{w}{w+z}$ e $(w, z) \mapsto g(w, z) := \frac{z}{w+z}$ sono olomorfe e limitate; e dalla limitatezza di $f(A, B)$ e $g(A, B)$ si possono dedurre le stime suddette, perché $f(A, B)(A + B) \subseteq A$ e $g(A, B)(A + B) \subseteq B$. ■

2.6 In relazione al tipo di problemi esposti qui sopra, nei lavori [1, 15] si è data la seguente definizione: si dice che uno spazio di Banach complesso X ha la proprietà del calcolo funzionale congiunto se comunque dati due operatori settoriali A e B in X i cui risolventi commutino, e che abbiano calcolo funzionale H^∞ limitato su settori S_{θ_A} e S_{θ_B} , la coppia (A, B) ha calcolo funzionale H^∞ limitato su $S_{\theta_A+\varepsilon} \times S_{\theta_B+\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$. In [1] è provato che ogni spazio del tipo $L^q(\Omega)$ con $1 < q < \infty$ ha questa proprietà; in [15] la stessa proprietà viene dimostrata per una classe un po' più ampia di spazi di Banach,

caratterizzati da una proprietà geometrica riguardante un certo tipo di comportamento delle funzioni di Rademacher. ■

2.7 Un altro modo di affrontare il problema della regolarità massimale per l'equazione $Au + Bu = f$, è quello di cercare di dimostrare la limitatezza dell'operatore $h(A)$, dove $h(z) = z(z+B)^{-1}$. Questo pone il problema di provare, anche in casi concreti, l'esistenza del calcolo funzionale H^∞ limitato quando la funzione olomorfa è a valori operatoriali. Quando, per esempio, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, per dimostrare la stima $\|f(T_1, \dots, T_N)\| \leq C \|f\|_\infty$ per $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ possono essere utili teoremi di moltiplicatori. Conseguentemente ci si aspetta che il "caso vettoriale" (cioè quello in cui $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$) sia molto più difficile del "caso scalare" ($f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$), perché nel primo caso bisogna ricorrere a moltiplicatori a valori operatoriali, invece che moltiplicatori scalari. Utilizzando il concetto di R-limitatezza, in [14] si è provato un interessante risultato che mette in relazione l'esistenza del calcolo funzionale "scalare" con quello "operatoriale" (v. sotto). ■

2.8 In uno spazio di Hilbert, l'esistenza del calcolo funzionale H^∞ è, per un operatore settoriale, equivalente alla limitatezza delle potenze immaginarie (v. [16]). Peraltro in [8] è provato che in uno spazio di Hilbert, per ottenere che $A+B$ sia chiuso è sufficiente chiedere che uno dei due operatori abbia potenze immaginarie limitate e che l'altro sia solo un operatore settoriale (beninteso, occorre una condizione di compatibilità analoga a $\theta_A + \theta_B < \pi$, e che in questo caso riguarderà la somma tra l'angolo spettrale di un operatore e il coefficiente esponenziale di crescita delle potenze immaginarie dell'altro, invece della somma dei due angoli spettrali). A questo punto si può formulare la seguente congettura: se in uno spazio di Banach con la proprietà UMD A e B sono operatori settoriali con i risolventi che commutano, se A ha calcolo funzionale H^∞ limitato sul settore S_{β_A} , se θ_B è l'angolo spettrale di B , e se $\beta_A + \theta_B < \pi$, allora $A+B$ è chiuso. A proposito di questa congettura c'è da dire quanto segue.

- (i) Se E è uno spazio di Banach UMD e $1 < p < \infty$, allora si può dimostrare (v. [12]) che nello spazio $L^p(0, T; E)$ l'operatore $u \mapsto u'$, con dominio $\{u \in W^{1,p}(0, T; E); u(0) = 0\}$ ha calcolo funzionale H^∞ limitato su $S_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$; d'altra parte, se $-\Lambda$ è il generatore infinitesimale di un semigruppone analitico di classe C_0 in E , allora, per un opportuno $\omega \in \mathbb{R}$, l'operatore $u \mapsto (A + \omega I)u = \Lambda u + \omega u$ è settoriale con angolo spettrale $< \frac{\pi}{2}$ nello spazio $L^p(0, T; E)$. Pertanto se la congettura fosse vera, ne seguirebbe che in uno spazio di Banach UMD la soluzione del problema di Cauchy (2.5) ha regolarità massimale non appena $-\Lambda$ è il generatore infinitesimale di un semigruppone analitico.
- (ii) La congettura è falsa: in un recente lavoro [13] è stato dimostrato che in ogni reticolo di Banach separabile che non sia isomorfo a uno spazio di Hilbert (per esempio in $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ e $p \neq 2$) esiste un generatore infinitesimale di semigruppone analitico per il quale la soluzione del problema (2.5) non ha la proprietà di regolarità massimale.
- (iii) La congettura non è poi tanto lontana dal vero; infatti diventa vera (v. [14]) se si sostituisce l'ipotesi che B sia settoriale con l'ipotesi che B sia R-settoriale; questo significa richiedere che fuori di un settore l'insieme degli operatori del tipo $B(z-B)^{-1}$ sia R-limitato in $\mathcal{L}(X)$ invece che (solamente) limitato. ■

È quindi il caso di occuparsi della R-limitatezza.

3 R-limitatezza

La proprietà di R-limitatezza di una famiglia di operatori limitati compare, senza ricevere esplicitamente un nome, già in [3]. Più tardi è stata esplicitamente introdotta in [2]; risultati sulla R-limitatezza si possono trovare in [4, 20].

3.1 Definizione. Siano X e Y spazi di Banach, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Diremo che \mathcal{T} è R-limitato se $\exists C \geq 0$ tale che comunque assegnati un intero positivo N , $T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}$ e $x_1, \dots, x_N \in X$ si ha

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k T_k x_k \right\|_Y \leq C \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k x_k \right\|_X.$$

Notiamo che se X è uno spazio di Banach e $f: \{-1, 1\}^N \rightarrow X$ è una funzione arbitraria, allora $\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} f(\varepsilon) = 2^N \int_0^1 f(r_1(t), \dots, r_N(t)) dt$, dove r_k è la k -esima funzione di Rademacher; pertanto, a causa dell'estensione (dovuta a Kahane) al caso di funzioni con valori in uno spazio di Banach della disuguaglianza di Khinchin per le funzioni di Rademacher (v. [7]), la disuguaglianza che appare nella definizione 3.1 si può riscrivere come

$$(3.2) \quad \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k T_k x_k \right\|_Y^p \right)^{1/p} \leq C_p \left(\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k x_k \right\|_X^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

La migliore costante C_p che si può porre in (3.2) (rispetto a tutte le possibili scelte di N , T_1, \dots, T_N , x_1, \dots, x_N) verrà denotata con $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

3.3 Osservazioni.

- (a) Se in (3.2) si pone $N = 1$ si ottiene subito che $\forall T \in \mathcal{T} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C_p$. Pertanto ogni insieme R-limitato \mathcal{T} è anche limitato (nella norma di $\mathcal{L}(X, Y)$) e $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \inf_{p \geq 1} C_p$.
- (b) Non conosco esempi di sottoinsiemi limitati e non R-limitati di $\mathcal{L}(X, Y)$. La loro esistenza, tuttavia, si può dedurre dai punti (ii) e (iii) dell'osservazione 2.8.
- (c) Se X è uno spazio di Hilbert, si può provare che

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^N} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k x_k \right\|^2 = 2^N \sum_{k=1}^N \|x_k\|^2$$

e da qui segue che se X e Y è uno spazio di Hilbert, e \mathcal{T} è un sottoinsieme limitato di $\mathcal{L}(X, Y)$, allora \mathcal{T} è R-limitato, e $\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. ■

Gli enunciati dei seguenti tre teoremi forniscono altrettanti esempi di famiglie R-limitate di operatori.

3.4 Teorema (principio di contrazione, di KAHANE, v. [7]). *Sia X uno spazio di Banach su \mathbb{K} , $M \in \mathbb{R}^+$. Allora $\{\lambda I_X; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq M\}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X)$, e $\forall p \in [1, \infty[$ si ha $\mathcal{R}_p(\{\lambda I_X; \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq M\}) \leq 2M$ (e, anzi, $\leq M$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

3.5 Teorema (v. [19]). *Sia $(\psi_i)_{i \in I}$ una famiglia di funzioni appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$; $\forall i \in I$ si supponga che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\psi_i$ appartenga a $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e che la funzione $t \mapsto t(\mathcal{F}\psi_i)'(t)$ appartenga a L^∞ . Supponiamo inoltre che*

$$\sup_{i \in I} \max \left\{ \|\mathcal{F}\psi_i\|_{L^\infty}, \|t(\mathcal{F}\psi_i)'(t)\|_{L^\infty} \right\} =: \eta < \infty$$

*Sia X uno spazio di Banach UMD, $1 < p < \infty$, e $\forall i \in I$ sia $T_i: L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, X)$ l'operatore definito da $T_i f = \psi_i * f$. Allora $\{T_i; i \in I\}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, X))$, e $\mathcal{R}_p(\{T_i; i \in I\}) \leq C(p, X) \eta$ (dove $C(p, X)$ è una costante che dipende solo da p e X).*

3.6 Teorema (v. [9]). *Sia $M \in \mathbb{R}^+$ e sia \mathcal{K} la famiglia delle funzioni misurabili $K: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano la condizione*

$$\text{ess sup}_{t, s \in \mathbb{R}^+} (t + s) |K(t, s)| \leq M.$$

Sia $1 < p < \infty$, sia X uno spazio di Banach e $\forall K \in \mathcal{K}$ sia T_K l'operatore definito formalmente su $L^p(\mathbb{R}^+, X)$ da $(T_K f)(t) = \int_0^\infty K(t, s) f(s) ds$. Allora $\{T_K; K \in \mathcal{K}\}$ è in realtà un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+, X))$, e $\mathcal{R}_p(\{T_K; K \in \mathcal{K}\}) \leq \frac{2M\pi}{\sin(\pi/p)}$.

Alcune operazioni su famiglie di operatori conservano la R-limitatezza. Per esempio, se T' e T'' sono famiglie R-limitate di operatori, allora la loro somma

$$T' + T'' = \{T' + T''; (T', T'') \in T' \times T''\}$$

e la loro unione $T' \cup T''$ sono ancora R-limitate, e inoltre, $\forall p \in [1, \infty[$, sia $\mathcal{R}_p(T' + T'')$ che $\mathcal{R}_p(T' \cup T'')$ sono $\leq \mathcal{R}_p(T') + \mathcal{R}_p(T'')$.

Se $T \subseteq (X, Y)$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(Y, Z)$ sono famiglie R-limitate di operatori, allora lo è anche $\mathcal{U} := \{ST; S \in \mathcal{S}, T \in T\}$ e $\mathcal{R}_p(\mathcal{U}) \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{S}) \mathcal{R}_p(T)$.

Un po' più interessanti sono i seguenti risultati:

3.7 Teorema. *Se T è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X, Y)$, allora anche $\overline{(T)}^w$ (la chiusura, nella topologia operatoriale debole, dell'involucro convesso di T) è R-limitato e $\mathcal{R}_p(\overline{(T)}^w) = \mathcal{R}_p(T)$.*

3.8 Teorema. Sia $(T_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $(T_{n,i})_{i \in I}$ sia R -limitata e che $\forall i \in I$ la successione $(T_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ sia convergente nella topologia forte di $\mathcal{L}(X, Y)$ a un operatore T_i . Sia $p \geq 1$. Supponiamo che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_p((T_{n,i})_{i \in I}) =: M < \infty$. Allora $(T_i)_{i \in I}$ è una famiglia R -limitata e $\mathcal{R}_p((T_i)_{i \in I}) \leq M$.

3.9 Corollario. Sia $(T_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $(T_{n,i})_{i \in I}$ sia R -limitata e che $\forall i \in I$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T_{n,i}$ sia convergente nella topologia forte di $\mathcal{L}(X, Y)$ a un operatore T_i . Sia $p \geq 1$. Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_p((T_{n,i})_{i \in I}) =: M < \infty$. Allora $(T_i)_{i \in I}$ è una famiglia R -limitata e $\mathcal{R}_p((T_i)_{i \in I}) \leq M$.

È evidente che il teorema 3.7 si può utilizzare per provare la R -limitatezza di una famiglia di operatori del tipo $\int_{\Omega} F(t, s) ds$; peraltro il corollario 3.9 può venire usato per provare che se Ω è un aperto di \mathbb{C} , $F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ è olomorfa e $K \subset \subset \Omega$, allora $F(K)$ è una famiglia R -limitata di operatori.

Conservano la R -limitatezza anche i seguenti due operatori "di sovrapposizione" qui sotto descritti. È inteso che X e Y sono spazi di Banach, e che $p \in [1, \infty[$.

- (a) Sia (Ω, μ) uno spazio con misura. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora per ogni funzione misurabile $f : \Omega \rightarrow X$ si può definire $\tilde{T}f : \Omega \rightarrow Y$ mediante la formula $\tilde{T}f = T \circ f$. È facile vedere che \tilde{T} è un operatore lineare continuo da $L^p(\Omega, X)$ a $L^p(\Omega, Y)$, e che $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Per di più, se \mathcal{T} è un sottoinsieme R -limitato di $\mathcal{L}(X, Y)$, e $\tilde{\mathcal{T}} := \{\tilde{T}; T \in \mathcal{T}\}$, allora $\tilde{\mathcal{T}}$ è un sottoinsieme R -limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mu, X), L^p(\mu, Y))$ e $\mathcal{R}_p(\tilde{\mathcal{T}}) \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.
- (b) Per $k = 1, 2$ sia (Ω_k, μ_k) uno spazio con misura σ -finita, e sia (Ω, μ) lo spazio con misura prodotto. Se $T \in \mathcal{L}(L^p(\mu_2, X), L^p(\mu_2, Y))$, si può definire l'operatore \hat{T} su $L^p(\mu, X)$ mediante la formula

$$(\hat{T}f)(\omega_1, \omega_2) = (T(f(\omega_1, \cdot)))(\omega_2).$$

È facile provare che $\hat{T} \in \mathcal{L}(L^p(\mu, X), L^p(\mu, Y))$, con $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$. Inoltre, se \mathcal{T} è un sottoinsieme R -limitato di $\mathcal{L}(X, Y)$, e se $\hat{\mathcal{T}} := \{\hat{T}; T \in \mathcal{T}\}$, allora $\hat{\mathcal{T}}$ è R -limitato e $\mathcal{R}_p(\hat{\mathcal{T}}) \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

4 R-limitatezza e regolarità massimale

La R -limitatezza è stata applicata con successo per ottenere teoremi di moltiplicatori operatoriali. È noto dalla metà degli anni '80 che vale una variante del teorema dei moltiplicatori di Mihlin per funzioni in $L^p(\mathbb{R}^N, X)$ (con $1 < p < \infty$) se X ha la proprietà UMD; in questo caso il moltiplicatore s'intende essere una funzione scalare. L'interesse di avere

teoremi analoghi quando il moltiplicatore prende valori operatoriali si può comprendere dal ragionamento che segue.

Se u è la soluzione *mild* del problema di Cauchy (2.5), allora almeno formalmente (ma in realtà effettivamente se f è abbastanza regolare) si ha (assumendo che Λ sia settoriale con angolo spettrale $\leq \frac{\pi}{2}$)

$$\Lambda u(t) = \int_0^t \Lambda \exp(-(t-s)\Lambda) f(s) ds$$

e quindi (continuando a procedere in modo formale, e denotando con \mathcal{F} la trasformazione di Fourier)

$$\mathcal{F}\Lambda u(\tau) = \Lambda (i\tau + \Lambda)^{-1} (\mathcal{F}f)(\tau).$$

Perciò si può ottenere la regolarità massimale della soluzione se si prova che la funzione $\tau \mapsto G(\tau) := \Lambda (i\tau + \Lambda)^{-1}$ è un moltiplicatore in $L^p(\mathbb{R}, X)$. Si osservi, a questo proposito, che G è limitata, e così è anche $\tau \mapsto \tau G'(\tau) = -i\tau \Lambda (i\tau + \Lambda)^{-2}$: in altri termini sono soddisfatte le condizioni che per una funzione *scalare* assicurano che essa è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbb{R}, X)$ se X ha la proprietà UMD e $1 < p < \infty$. Tuttavia del caso dei moltiplicatori operatoriali non si sapeva praticamente nulla fino a pochissimo tempo fa. La R-limitatezza ha permesso di ottenere risultati in questa direzione. I seguenti due teoremi sono stati dimostrati da L. Weis in [20]; il primo di essi è stato anche generalizzato in [18] a caso delle funzioni di più variabili.

4.1 Teorema. *Siano X e Y spazi di Banach con la proprietà UMD e sia $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ una funzione derivabile. Supponiamo che $\{M(t); t \in \mathbb{R}\}$ e $\{tM'(t); t \in \mathbb{R}\}$ siano sottoinsiemi R-limitati di $\mathcal{L}(X, Y)$. Allora $\forall p \in]1, \infty[$ M è un moltiplicatore di Fourier da $L^p(\mathbb{R}, X)$ a $L^p(\mathbb{R}, Y)$.*

4.2 Teorema. *Se X è uno spazio di Banach con la proprietà UMD, $p \in]1, \infty[$, e Λ è un operatore settoriale che agisce in X e ha angolo spettrale $< \frac{\pi}{2}$, allora la soluzione del problema (2.5) ha la proprietà di regolarità massimale in L^p se e solo se l'insieme $\{\Lambda(it - \Lambda)^{-1}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è R-limitato.*

Il teorema 4.2 suggerisce la seguente definizione.

4.3 Definizione. *Un operatore lineare T che agisce in uno spazio di Banach complesso X si dice essere R-settoriale con angolo R-spettrale $\beta \in]0, \pi[$ se:*

- (i) $\mathcal{D}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ sono densi in X
- (ii) $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\beta}$
- (iii) $\forall \varepsilon \in]0, \pi - \beta[$ l'insieme $\{T(z - T)^{-1}; z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\beta+\varepsilon}}\}$ è R-limitato.

È ovvio che ogni operatore R-settoriale è settoriale; d'altra parte si ha

4.4 Teorema (v. [5]). *Ogni operatore settoriale con potenze immaginarie limitate è R-settoriale.*

Diamo ora l'enunciato di alcuni risultati provati da N.J. Kalton e L. Weis in [14], ai quali si è fatto allusione nelle osservazioni 2.7 e 2.8.

4.5 Teorema. *Sia X uno spazio di Banach complesso con la proprietà UMD. Siano A e B operatori che agiscono in X e i cui risolvanti commutano. Si supponga che A sia settoriale abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_{\beta_A}, \mathbb{C})$ limitato, e che B sia R -settoriale con angolo R -spettrale θ_B . Se $\beta_A + \theta_B < \pi$, allora $A + B$ è chiuso.*

4.6 Corollario. *Sia X uno spazio di Banach complesso con la proprietà UMD e $p \in]1, \infty[$. Se Λ è un operatore R -settoriale in X , con angolo R -spettrale $< \frac{\pi}{2}$, allora la soluzione del problema 2.5 ha la proprietà di regolarità massimale in L^p .*

4.7 Teorema. *Sia T è un operatore settoriale nello spazio di Banach X , e sia \mathcal{A} una sottoalgebra chiusa del commutatore dei risolvanti di T in $\mathcal{L}(X)$. Si supponga che T abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato, e sia $f : \Sigma_\beta \rightarrow \mathcal{A}$ una funzione olomorfa il cui codominio sia R -limitato. Allora $f(T) \in \mathcal{L}(X)$.*

Il teorema 4.7 si può generalizzare come segue (la dimostrazione si può trovare in [10], dove si vede che vale anche l'analogo risultato nel caso bisettoriale).

4.8 Teorema. *Sia X uno spazio di Banach complesso e siano T_1, \dots, T_N operatori settoriali che agiscono in X e i cui risolvanti commutano. Sia \mathcal{A} una sottoalgebra chiusa del commutatore dei risolvanti di T_1, \dots, T_N . Si supponga che (T_1, \dots, T_N) abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato (con $\beta \in]0, \pi[^N$) e sia $f : S_\beta \rightarrow \mathcal{A}$ una funzione olomorfa il cui codominio sia R -limitato. Allora $f(T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre esiste una costante C (indipendente da f) tale che $\|f(T_1, \dots, T_N)\| \leq C \mathcal{R}_2(f(S_\beta))$.*

Il caso bisettoriale del teorema 4.8 è stato utilizzato in [9] per dimostrare la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per la realizzazione in L^p ($1 < p < \infty$), rispetto a condizioni al contorno generali, di un operatore ellittico di ordine arbitrario su un semispazio; l'operatore ha coefficienti costanti ed è di tipo principale.

Bibliografia

- [1] D. ALBRECHT, E. FRANKS, A. MCINTOSH: Holomorphic functional calculi and sums of commuting operators; Bull. Aust. Math. Soc. **58** (1998), 291-305.
- [2] E. BERKSON, T.A. GILLESPIE: Spectral decompositions and harmonic analysis on UMD spaces; Studia Math. **112** (1994), 13-49.
- [3] J. BOURGAIN: Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional; Ark. Mat. **21** (1983), 163-168.
- [4] P. CLÉMENT, B. DE PAGTER, F.A. SUKOCHEV, H. WITVLIET: Schauder decompositions and multiplier theorems; Studia Math. **138** (2000), 135-163.

- [5] P. CLÉMENT, J. PRÜSS: An operator-valued transference principle and maximal regularity on vector-valued L_p -spaces; in "Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences" (G. Lumer, L. Weis, eds.), Marcel Dekker, New York - Basel, 2001, pp. 67-87.
- [6] M. COWLING, I. DOUST, A. MCINTOSH, A. YAGI: Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus; J. Austral. Math. Soc. Ser A **60** (1996), 51-89.
- [7] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE: *Absolutely Summing Operators*; Cambridge Univeristy Press, 1995.
- [8] G. DORE, A. VENNI: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z. **196** (1987), 189-201.
- [9] G. DORE, A. VENNI: H^∞ functional calculus for an elliptic operator on a half-space with general boundary conditions; preprint.
- [10] G. DORE, A. VENNI: H^∞ functional calculus for bisectorial operators; preprint.
- [11] Y. GIGA, H. SOHR: Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains; J. Funct. Anal. **102** (1991), 72-94.
- [12] M. HIEBER, J. PRÜSS: Functional calculi for linear operators in vector-valued L^p -spaces via the transference principle; Adv. Differential Equations **3** (1998), 847-872.
- [13] N.J. KALTON, G. LANCIEN: A solution to the problem of L^p -maximal regularity; Math. Z. **235** (2000), 559-568.
- [14] N.J. KALTON, L. WEIS: The H^∞ -calculus and sums of closed operators; preprint.
- [15] F. LANCIEN, G. LANCIEN, C. LE MERDY: A joint functional calculus for sectorial operators with commuting resolvents; Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1998), 387-414.
- [16] A MCINTOSH: Operators which have an H^∞ functional calculus; Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **14** (1986), 210-231.
- [17] J. PRÜSS, H. SOHR: On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces; Math. Z. **203** (1990), 429-452.
- [18] Ž. ŠTRKALJ, L. WEIS: On operator-valued Fourier multiplier theorems; preprint.
- [19] A. VENNI: Mihlin multiplier theorem and R-boundedness; preprint.
- [20] L. WEIS: Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p -regularity; preprint.